Лекция 4. Екі өлшемді сызықтық жүйелер. Екі өлшемді сызық-ты жүйелердің тепе-теңдік күйі және оның тұрақтылығы (дәріс беруші-қауымдастырылған профессор Маусымбекова С.Д.)

Алматы, 2024

Екі өлшемді сызықтық жүйелер.

Екі өлшемді жүйелердің фазалық портреттері қарастырылады:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

Зерттеулер сызықты жүйелерден басталады:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{1}$$

мұндағы a, b, c, d – нақты сандар.

Алдымен, $ad - bc = 0$ жағдайы қарастырылады. (1.5) жүйесінің екінші теңдеуінің бірінші теңдеуіне қатынасы келесідей болады:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \approx \frac{cx + dy}{ax + by}.$$

Онда:

$$\frac{dy}{dx} = k$$

Осыдан $y = kx + m$, мұндағы k, m – нақты сандар. (1.5) жүйесінің фазалық траекториясы $y = kx + m$ параллель түзулерінде жатады, ал $ax + by = 0$ түзуінің барлық нүктерелері (1.5) жүйесінің тепе-теңдік күйі болады.

Егер (1.5) келесі түрде болса

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Бірінші теңдеудің екінші теңдеуге қатынасы арқылы келесі теңдеу алынады:

$$\frac{dx}{dy} = 0.$$

Келесі жағдайда

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

фазалық жазықтықтың барлық нүктклері тепе-теңдік күй болып есептеледі.

$ad - bc \neq 0$ жағдайында келесі жүйенің

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

жалғыз шешімі бар - (0;0), яғни (1.5) жалғыз тепе-теңдік күйге ие.

(1.5) жүйесін сызықтық түрлендіру арқылы келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} u = Ax + By \\ v = Ex + Fy \end{cases}$$

Мұндағы A, B, E, F – нақты сандар, $AF - BE \neq 0$. A, B, E, F коэффициенттерін жаңа система келесідей болатындай етіп таңдап алуға болады:

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u, \\ \dot{v} = \lambda_2 v. \end{cases}$$

(1.6) теңдігі (1.5) жүйесіне қойылып, келесі теңдіктер алынады:

$$\begin{cases} \dot{u} = A\dot{x} + B\dot{y} \\ \dot{v} = E\dot{x} + F\dot{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = A(ax + by) + B(cx + dy) = \lambda_1 u = \lambda_1(Ax + By) \\ \dot{v} = E(ax + by) + F(cx + dy) = \lambda_2 v = \lambda_2(Ex + Fy) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(ax + by) + B(cx + dy) = \lambda_1(Ax + By) \\ E(ax + by) + F(cx + dy) = \lambda_2(Ex + Fy). \end{cases}$$

x, y коэффициенттерін теңестіру арқылы

$$\begin{cases} Aa + Bc = \lambda_1 A, \\ Ab + Bd = \lambda_1 B, \\ Ea + Fc = \lambda_2 E, \\ Eb + Fd = \lambda_2 F, \end{cases}$$

яғни

$$\begin{cases} (a - \lambda_1)A + cB = 0, \\ bA + (d - \lambda_1)B = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - \lambda_2)E + cF = 0, \\ bE + (d - \lambda_2 F) = 0. \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйеснің ноль емес шешімдері бар болады, егер λ_1 және λ_2 келесі теңдеудің түбірлері болса:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

немесе анықтауышты ашу арқылы

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0.$$

(1.6) теңдеуі (1.5) жүйесінің характеристикалық теңдеуі деп аталса, λ_1,λ_2 – *характеристикалық сандар деп аталады.*

Төменде әр түрлі жағдайлар қарастырылады.

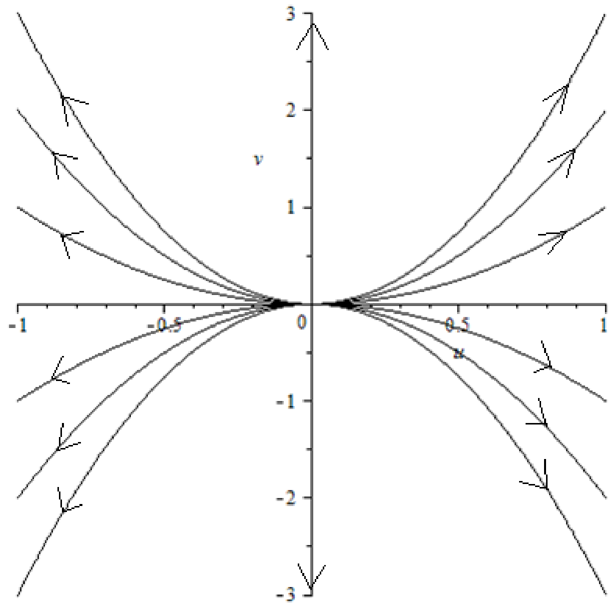
1. λ_1 және λ_2 нақты, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. (1.7) жүйесінің әр теңдеуін шешу арқылы келесі өрнектерді аламыз:

$$u = C_1 e^{\lambda_1 t}, v = C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3}$$

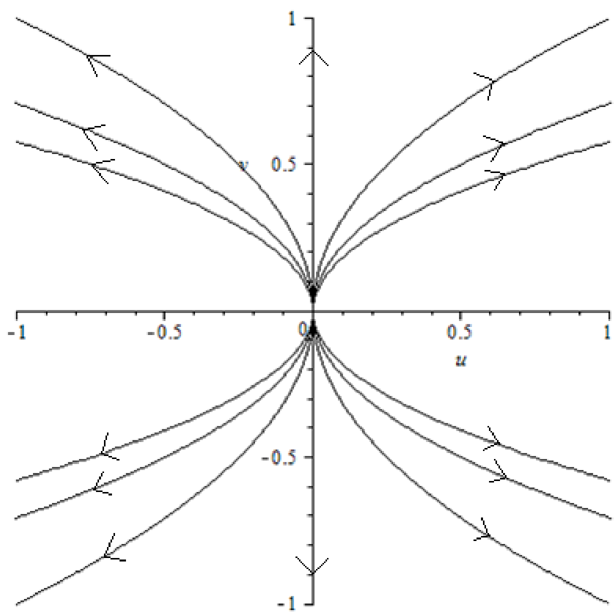
$C_1 \neq 0$ кезінде

$$v = C_2 e^{\lambda_2 t} = |C_1|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C_2 |C_1 e^{\lambda_1 t}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = |C_1|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C_2 |u|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C_3 |u|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \tag{4}$$

$\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, болғандықтан (1.7) жүйесінің фазалық траекториясы 1.7- суретінде көрсетілгендей болады.



1.7-сурет



1.8-сурет

$C_1 = 0$ және $C_2 = 0$ жағдайында (1.9) теңдігінен $u = 0$ және $v = 0$ түзулерінде фазалық траекториялардың орналасқаны шығады. $\lambda_1 > 0$ және $\lambda_2 > 0$ болғандықтан (1.9) келесі өрнекті аламыз:

$$\lim_{t\to\infty} u = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} v = \infty,$$

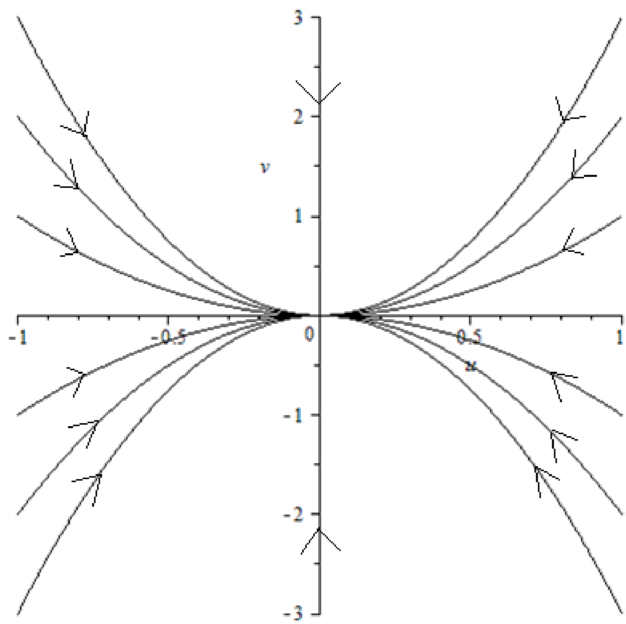
Бағыттар (0;0) нүктесінен басталады. Тепе-теңдіктің бұл күйі **тұрақсыз түйін** деп аталады.

Егер $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, онда $0 < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ бұл жағдайдағы фазалық портрет 1.8-суретінде келтірілген.

2. λ_1 және λ_2 нақты $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, болғандықтан (1.7) жүйесінің фазалық траекториясы 1.7-суретіндегідей, бірақ (1.9) теңдігінен

$$\lim_{t\to\infty} u = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} v = \infty.$$

шығады, олай болса фазалық портрет 1.9-суретінде көрсетілгендей. Тепе-теңдік күйі



1.9-сурет

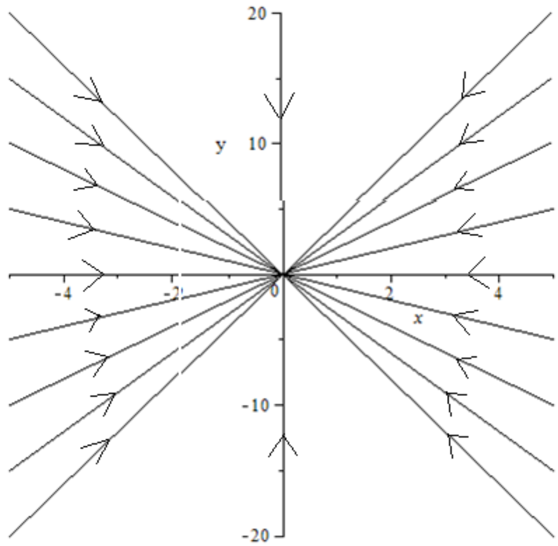
бұл жағдайда **тұрақты түйін** деп аталады.

Егер $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, фазалық траекториялар 1.8- суретіндегідей, бірақ нүктелер координат басына бағытталған.

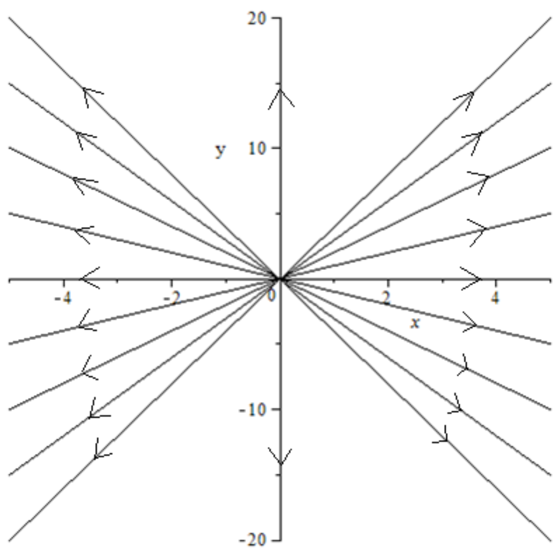
3. λ_1 және λ_2 нақты $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Егер (1.5) келесі түрде болса

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x, \\ \dot{y} = \lambda y, \end{cases} \tag{5}$$

Онда $x = C_1e^{\lambda t}$, $y = C_2e^{\lambda t}$ және $y = \dfrac{C_2}{C_1}x = C_3x -$ түзулері координат басынан өтеді, егер $\lambda < 0$ болса **тұрақты дикритикалық түйін**, егер $\lambda > 0$ **тұрақсыз дикритикалық түйін** (1.11-сурет).

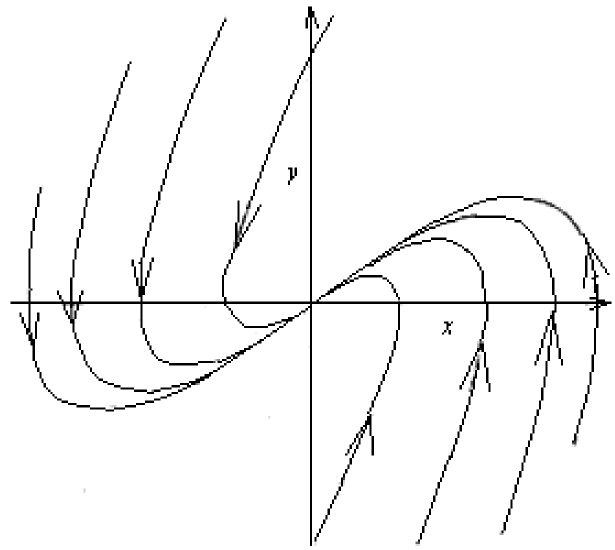


1.10-сурет

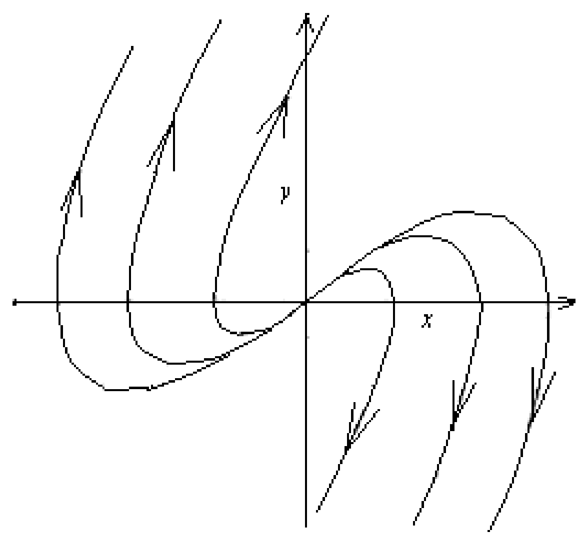


1.11-сурет

Енді $\lambda < 0$ (1.12-сурет) және $\lambda > 0$ (1.13-сурет) кезінде фазалық траекториялардың орналасуын қарастырайық. Бұл жағдайда тепе-теңдік жағдайы **депренирленген түйін** деп аталады (тиісінше, тұрақты және тұрақсыз).



1.12-сурет



1.13-сурет

4. λ_1 және λ_2 нақты, таңбалары әр түрл. (1.10) теңдігінде $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, және (1.9) - дан $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $C_1 \neq 0$ үшін

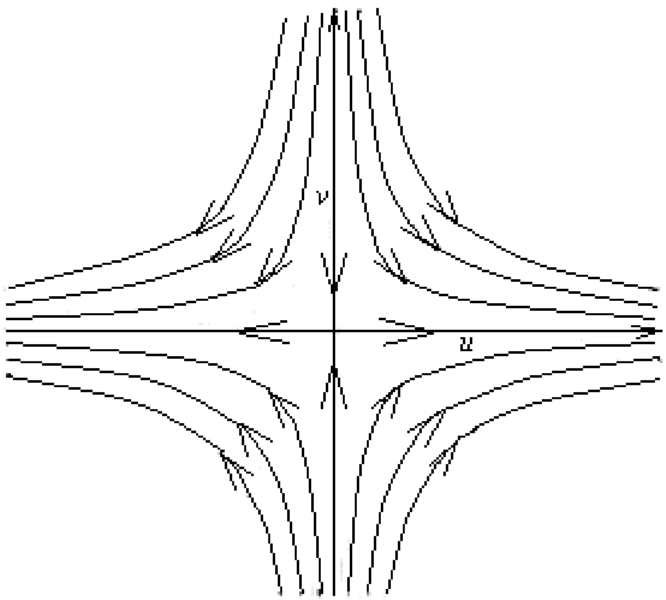
$$\lim_{t\to\infty} u = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} v = 0$$

(1.14-сурет) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $C_2 \neq 0$ жағдайында

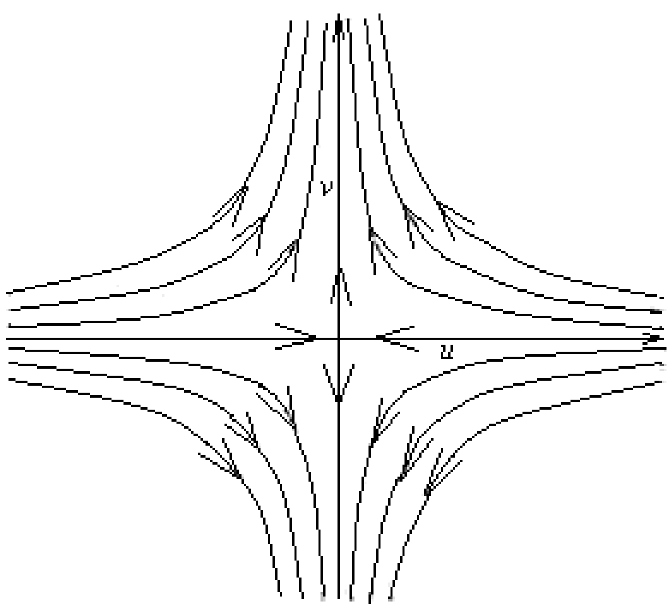
$$\lim_{t\to\infty} u = 0, \quad \lim_{t\to\infty} v = \infty$$

(1.15-сурет).

Тепе-теңдік күйі **ертоқым** аталады.



1.14-сурет



1.15-сурет

5. Егер $\lambda_1 = p+iq, \lambda_2 = p-iq, p \neq 0, q \neq 0$ (1.5) жүйесін арнайы сызықтық турлендіру арқылы келесі түрге келтіруге болады:

$$\begin{cases} \dot{u} = pu + qv, \\ \dot{v} = -qu + pv. \end{cases} \tag{6}$$

$u = \rho cos(\theta), v = \rho sin(\theta)$- полярлық координаталарға өту арқылы келесі теңдеулер алынады:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt}cos\theta - \rho sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} = p\rho cos\theta + q\rho sin\theta \\ \dfrac{d\rho}{dt}sin\theta + \rho cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} = -q\rho cos\theta + p\rho sin\theta \end{cases}$$

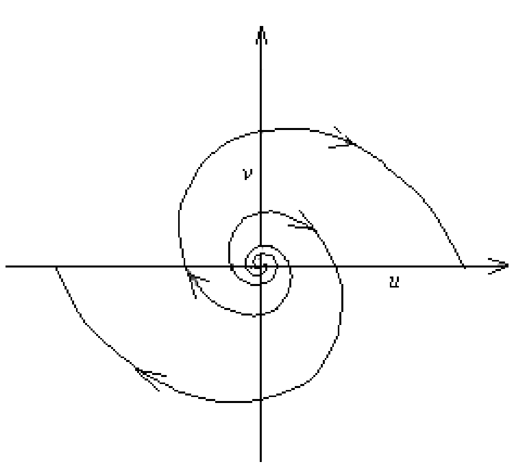
Бірінші теңдеуді $cos\theta$, екінші теңдеуді $sin\theta$ көбейту, оларды өзара қосу арқылы келесі теңдік алынады:

$$\frac{d\rho}{dt} = p\rho. \tag{7}$$

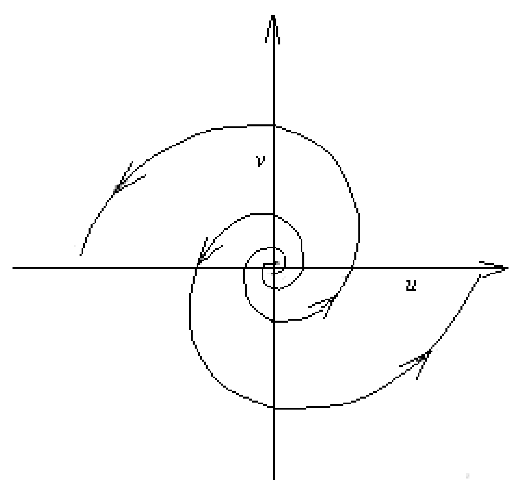
$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = (\arctan\frac{v}{u})^* = \frac{1}{1+(\dfrac{v}{u})^2}\frac{\dot{v}u - v\dot{u}}{u^2} = \frac{u^2}{u^2+v^2} * \frac{(-qu+pv)u - v(pu+qv)}{u^2} = -q.$$

(1.13) өрнегінен, $p > 0$ орындалғанда нүктенің уақыт өткен сайын координаталар басынан алыстайтынын, ал $p < 0$ жағдайында координаталар басына жақындайтынын көруге болады. Сонымен қатар, $\bar{\theta} < 0$ үшін нүкте спираль бойымен сағат бойынша жылжыса, $\bar{\theta} > 0$ кезінде спираль бойымен сағат бағытына қарсы жылжиды, яғни жылжу бағыты q таңбасына байланысты.

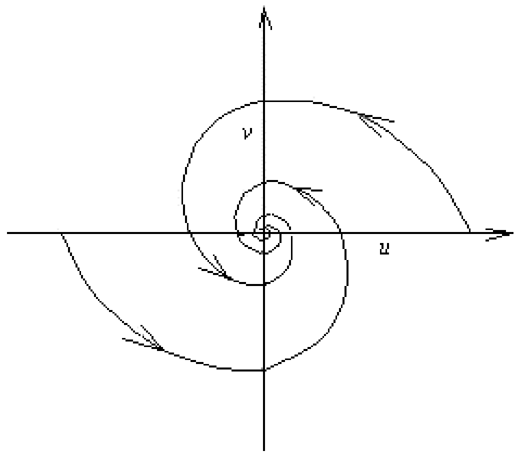
Қорытындылай келе, λ_1, λ_2 түбірлерінің нақты бөлігі оң болса, онда (1.12) жүйесінің фазалық траекториясы 1.16- немесе 1.17- суреттерінде көрсетілгендей болады. "0"тепетеңдік күйі **тұрақсыз фокус** аталады.



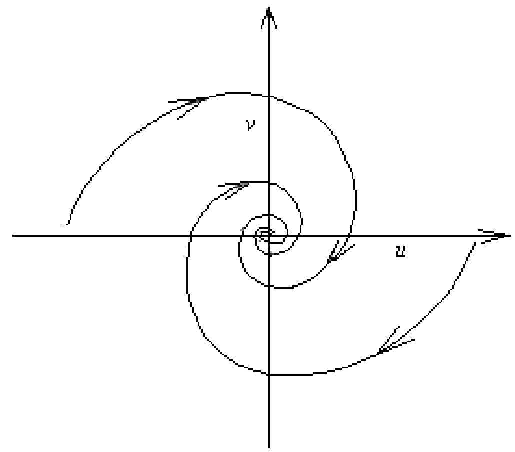
1.16-сурет



1.17-сурет



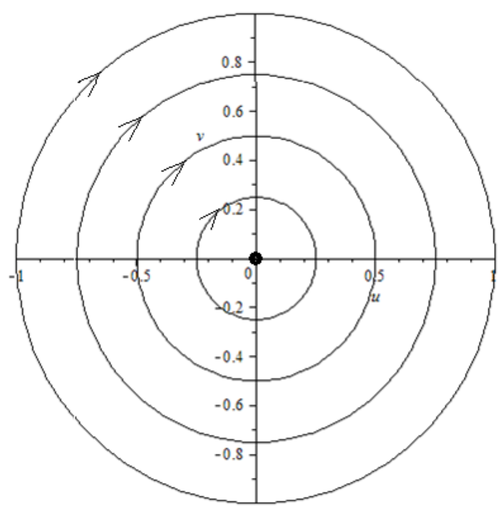
1.18-сурет



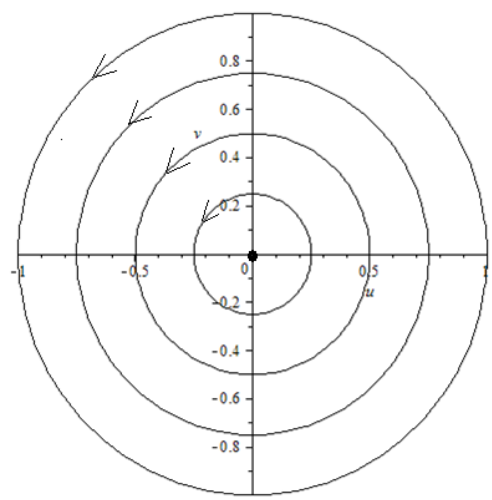
1.19-сурет

$p < 0$ жағдайы үшін фазалық траекториялар 1.18, 1.19- суреттерінде көрсетілген. 0 тепе-теңдік күйі **тұрақсыз фокус** аталады.

6. $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = iq$, $q > 0$. Бұл жағдайда (1.13) теңдігінен $\rho = C_1$ өрнектеледі, яғни фазалық траекториялар – центрі координаталар басында жататын шеңберлер (1.20, 1.21-суреттер). Тепе-теңдік күй **торталық** деп аталады. Егер x және y айнымалыларына, яғни (1.5) жүйесіне ауыссақ, фазалық портреттер (1.7), (1.12) жүйелерінің фазалық портреттерінен бұрылу және созылу арқылы ерекшеленеді.



1.20-сурет



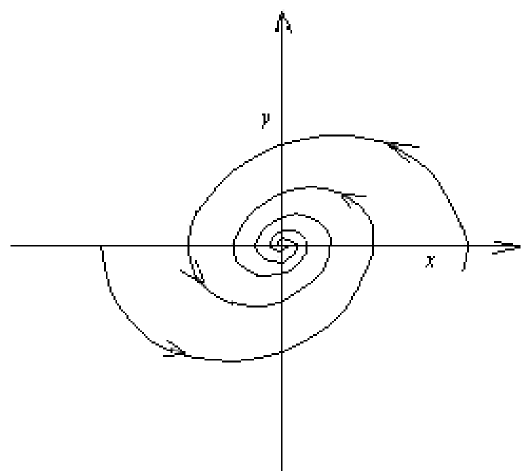
1.21-сурет

7. Характеристикалық сандардың біреуі немесе екеуі де нөлге тең. (1.8) теңдігіне $\lambda = 0$ өрнегін қою арқылы $ad - bc = 0$ өрнегін аламыз және бұл жағдай бөлімнің басында қарастырылды. Түйін мен ертоқым жағдайында төрт траектория бар, олардың әрқайсысы $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$ түзулерінде жататын жартылай түзулерді құрайды. Егер

тепе-теңдік күй түйін болса, қалған траекториялар осы түзулердің бірін координаталар басында қияды. "Ертоқым"нүктесінің айналасында бұл түзулер асимптота болады, "ертоқым"нүктесінің сепаратриссасы деп аталады Келесі жүйенің фазалық траекториясын қарастырайық.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \tag{8}$$

(1.16) жүйесінің характеристикалық теңдеуі: $\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ Оның түбірлері: $\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i$, (0;0) - тепе-теңдік күйі – **тұрақты фокус.**



1.22-сурет

Мысал. Екінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеулермен берілген жүйенің стационарлық күйін іздеу есебі:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 9xy - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 3xy - 4y - 2y^2 \end{cases} \tag{9}$$

(9) жүйесін сызықтандыру келесі алмастыру арқылы орындалады:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \xi \\ y = \bar{y} + \eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \bar{x} + \xi - 9(\bar{x} + \xi)(\bar{y} + \eta) - (\bar{x} + \xi)^2 \\ \frac{d\eta}{dt} = 3(\bar{x} + \xi)(\bar{y} + \eta) - 4(\bar{y} + \eta) - 2(\bar{y} + \eta)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \bar{x} + \xi - 9(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\eta + \xi\bar{y} + \xi\eta) - \bar{x}^2 - 2\bar{x}\xi - \xi^2 \\ \dfrac{d\eta}{dt} = 3(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\eta + \xi\bar{y} + \xi\eta) - 4\bar{y} - 4\eta - 2\bar{y}^2 - 4\bar{y}\eta - 2\eta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \bar{x} - 9\bar{x}\bar{y} - \bar{x}^2 + \xi(1 - 9\bar{y} - 2\bar{x}) - 9\bar{x}\eta - \xi^2 - 9\xi\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = 3\bar{x}\bar{y} - 4\bar{y} - 2\bar{y}^2 + 3\xi\bar{y} + \eta(3\bar{x} - 4 - 4\bar{y}) - 2\eta^2 + 3\xi\eta \end{cases}$$

$$\bar{x} - 9\bar{x}\bar{y} - \bar{x}^2 = 0; \qquad \bar{x}\bar{y} - 4\bar{y} - 2\bar{y}^2 = 0;$$

$$P'_x(\bar{x}, \bar{y}) = a = 1 - 9\bar{y} - 2\bar{x}; \qquad P'_y(\bar{x}, \bar{y}) = b = -9\bar{x};$$

$$Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) = c = 3\bar{y}; \qquad Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) = d = 3\bar{x} - 4 - 4\bar{y};$$

Сызықты емес бөлік ескерілмеген жағдайда келесі теңдіктер алынады:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta \end{cases} \tag{10}$$

Төрт ерекше нүктелерді алу үшін (9)жүйесін нольге теңестірейік:

$$\begin{cases} x - 9xy - x^2 = 0 \\ 3xy - 4y - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1 - 9y - x) = 0 \\ y(3x - 4 - 2y) = 0 \end{cases}$$

1. $x_1 = 0, \quad y_1 = 0;$ 2. $x_2 = 0, \quad y_2 = -2;$ 3. $x_3 = 1, \quad y_3 = 0;$

$$4. \begin{cases} 1 - 9y - x = 0 \\ 3x - 4 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 9y \\ 3 - 27y - 4 - 2y = 0 \end{cases}$$
$$-29y = 1$$

$$x_4 = \frac{38}{29}, \quad y_4 = -\frac{1}{29};$$

(10) жүйесі әрбір ерекше төрт нүкте үшін қарастырылады. (0,0) нүктесі үшін келесі коэффициенттер анықталады:

$$a = 1 - 9\bar{y} - 2\bar{x} = 1;$$

$$b = -9\bar{x} = 0;$$

$$c = 3\bar{y} = 0;$$

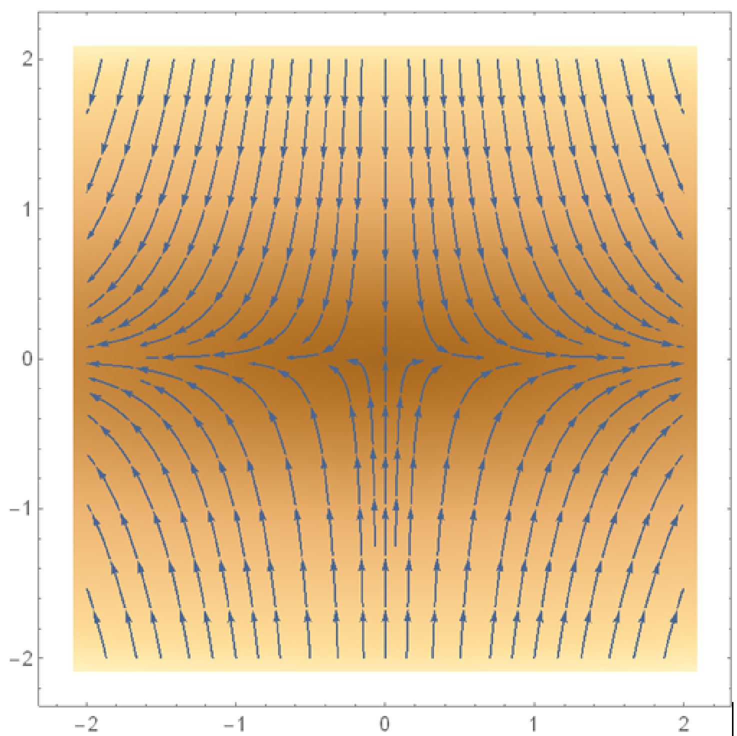
$$d = 3\bar{x} - 4 - 4\bar{y} = 4;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \xi \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -4\eta \end{cases}$$

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = 9 + 16 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = 1; \quad -4.$$

Горизонтальді изоклина: $\dfrac{d\xi}{dt} = 0, \quad \xi = 0$. Вертикальді изоклина: $\dfrac{d\eta}{dt} = 0, \quad \eta = 0$.



1.23-сурет. Фазалық портрет – ертоқым.

Екінші тепе -теңдік нүктесі (0;2) үшін:

$$a = 1 - 9\bar{y} - 2\bar{x} = 19;\ b = -9\bar{x} = 0;$$

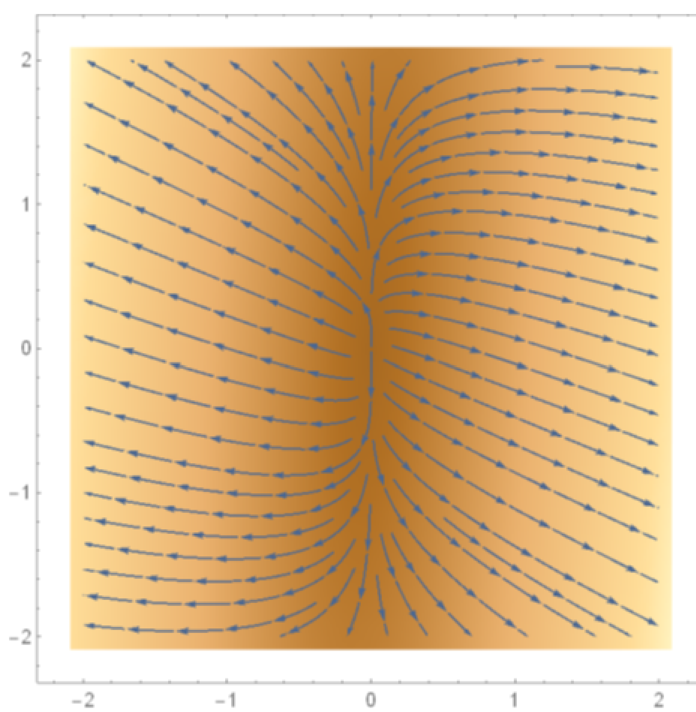
$$c = 3\bar{y} - 6;\ d = 3\bar{x} - 4\bar{y} = 4;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = 19\xi \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -6\xi + 4\eta \end{cases}$$

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = 23^2 - 4 * 76 = 225$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{23 \pm 15}{2} = 19; \quad 8.$$

Фазалық портрет — тұрақсыз түйін.



1.24-сурет.
Фазалық портрет — тұрақсыз түйін.

Үшінші стационарлық нүкте - (1,0):

$$a = 1 - 9\bar{y} - 2\bar{x} = -1; \quad b = -9\bar{x} = -9;$$

$$c = 3\bar{y} = 0; \quad d = 3\bar{x} - 4 - 4\bar{y} = -1;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\xi - 9\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\eta \end{cases}$$

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = 4 - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-2}{2} = -1; \quad -1.$$

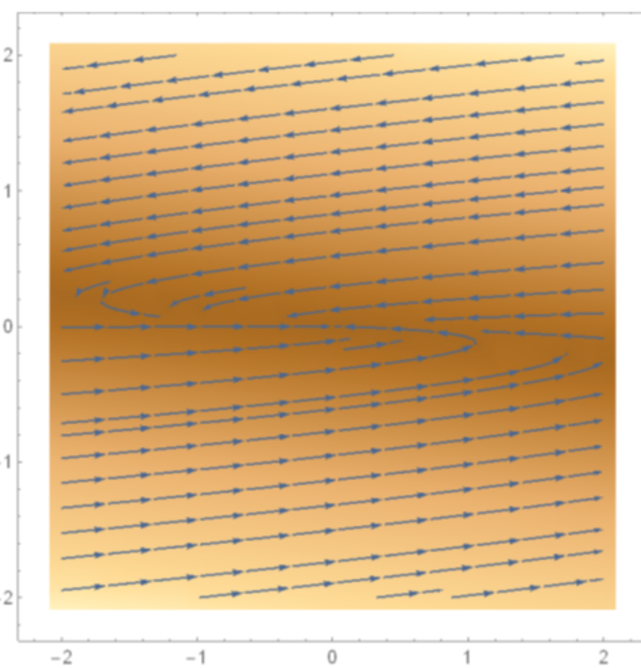
Фазалық портрет — тұрақты өзгешеленген түйін.

Горизонтальді изоклин:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \eta = -\frac{1}{9}\xi.$$

Вертикальді изоклин:

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \eta = 0.$$



1.25-сурет.
Фазалық портрет — тұрақты өзгешеленген түйін

Төртінші стационарлық нүкте:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{38}{29}\xi - \dfrac{342}{29}\eta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{3}{29}\xi + \dfrac{2}{29}\eta \end{cases}$$

$$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = \frac{5704}{841}$$

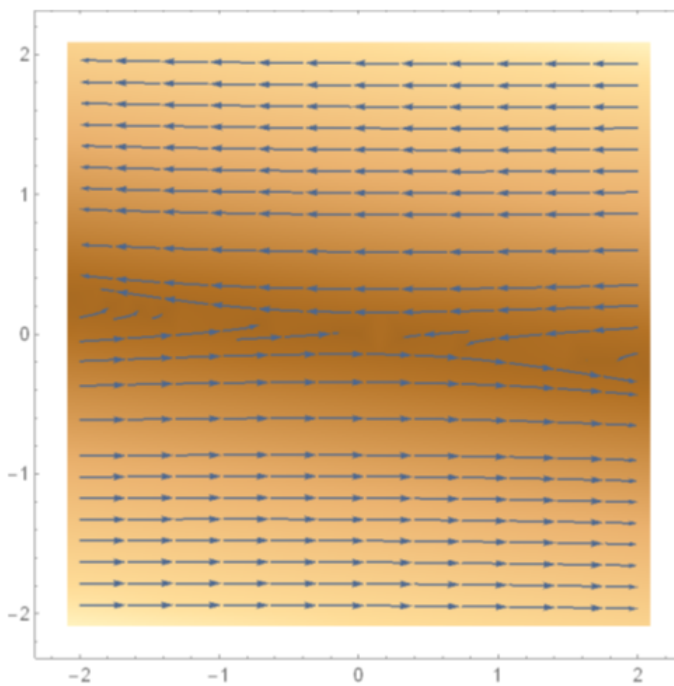
$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-1.24 \pm 2.6}{2} = 0.68; \quad -1.92.$$

Фазалық портрет — ертоқым. Горизонтальді изоклин:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \eta = -\frac{38}{342}\xi.$$

Вертикальді изоклин:

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \eta = \frac{3}{2}\xi.$$



1.26-сурет . фазалық портрет -ертоқым.

Сұрақтар:

1. Динамикалық жүйелердің асимптоталық тұрақты тепе-теңдік күйі дегеніміз не?

2. Ляпунов бойынша тұрақтылықты анықтаңыз.
3. Динамикалық жүйенің характеристикалық теңдеуін түсіндіріңіз.
4. Динамикалық жүйенің характеристикалық саны дегеніміз не?
5. Тұрақсыз түйін – тепе-теңдік күйін анықтаңыз.
6. Тұрақты түйін - тепе-теңдік күйін анықтаңыз .
7. Ертоқым – тепе-теңдік күйін анықтаңыз.
8. Тұрақты фокус күйін анықтап, сипаттаңыз.

Әдебиеттер:

(a) Бейли Н. Математика в биологии и медицине. Москва, Изд-во «Мир», 1970

(b) С.А.Ляшко «Элементы теории динамических систем» Учебное пособие для студентов специальности «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика» Балашов, Изд-во «Николаев», 2005, 104С.

(c) В.И. Арнольд «Обыкновенные дифференциальное уравнения» Ижевск: Удм.ГУ, 2000. – 368 с.